MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT
ET DES TRANSPORTS

CONCOURS COMMUN 1993
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES OPTION

Temps accordé : 4 heures
(3 pages)

10

$\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels ; $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls ;
$\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs.
$\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Préliminaire

On considère la suite $(\gamma_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ définie par $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle converge vers $\gamma \in]0, 1[$.

Première Partie

Dans cette partie $x \in \mathbf{R}^{+*}$

I.1. Montrer $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est une intégrale convergente, on la note $\Gamma(x)$.

I.2. Déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ et en déduire, pour $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $\Gamma(n+1)$.

I.3.a . On définit la suite $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ de fonctions par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \text{ et } \forall x \in \mathbf{R}^{+*}, \quad \Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Etudier la convergence de la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$. En déduire que Γ est continue sur $\mathbf{R}^{+*}$.

b. Soit a et $A \in \mathbf{R}^{+*}$ tels que $0<a<A$. Montrer que Γ est de classe C^2 sur $[a, A]$

c. Montrer que Γ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^{+*}$, exprimer $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

I.4.a. Etudier les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$

b. Etudier les variations de Γ et tracer la courbe représentative de Γ. (Pour la variation de Γ, on utilisera, outre le signe de Γ'', la relation entre $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$).

I.5.a. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall\, t \in [0, n] \qquad f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad , \quad \forall t \in]\, n, +\infty[\qquad f_n(t) = 0$$

On pose $f(t) = e^{-t}$, démontrer que : $\forall\, t \in \mathbf{R}^+$, $\quad 0 \leq f(t) - f_n(t) \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$,

(on pourra considérer les trois intervalles $\left[0, \sqrt{n}\right[$, $\left[\sqrt{n}, n\right]$ et $]\,n, +\infty[$)

et en déduire que : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt\right)$.

b. En déduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\, n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$.

c. Montrer que $\forall\, x \in]0, 1[$, on a $\quad \dfrac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x.\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(1 - \frac{x^2}{k^2})\right)$

d. Montrer que $\forall\, x \in \mathbf{R}^{+*}$ $\quad \dfrac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} . \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right)$

puis déterminer un développement en série de $\ln(\Gamma(x))$.

Deuxième partie

Soit a et $b \in \mathbf{R}^{+*}$, $\alpha(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\theta.\, \cos^{2b-1}\theta.\, d\theta$ et $\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$

II.1.a. Montrer la convergence des intégrales $\alpha(a,b)$ et $\beta(a,b)$.
Comparer $\beta(b,a)$ et $\beta(a,b)$. Trouver une relation entre $\alpha(a,b)$ et $\beta(a,b)$

b. g_r désigne l'intégrale $g_r(a) = \int_0^r e^{-x^2} x^{2a-1} dx$; en utilisant des intégrales doubles sur des compacts de $\mathbf{R}^2$ que l'on précisera, montrer que :

$$\forall r>0,\ \forall\, a \geq \frac{1}{2}\ ,\ \forall\, b \geq \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} g_r(a+b).\beta(a,b) \leq g_r(a).g_r(b) \leq \frac{1}{2} g_{r\sqrt{2}}(a+b).\beta(a,b)$$

c. En déduire pour $a \geq \frac{1}{2}$ et $b \geq \frac{1}{2}$, une relation entre $\Gamma(a)$, $\Gamma(b)$, $\Gamma(a+b)$ et $\beta(a,b)$

d. Etablir pour tout a et $b \in \mathbf{R}^{+*}$, une relation entre $\beta(a, b)$ et $\beta(a+1, b)$ puis entre $\beta(a, b)$ et $\beta(a+1, b+1)$

Conclure que l'égalité obtenue en **c.** est encore valable pour tout couple $(a,b) \in (\mathbf{R}^{+*})^2$.

II.2.a. Soit $x \in]0, 1[$ et F la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, 2π–périodique telle que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ $F(t) = \cos(x\,t)$

Calculer la série de Fourier de F et étudier sa convergence.

b. En déduire un développement en série de fonctions de $x \to \operatorname{cotan}(\pi x)$

II.3. Conclure que pour $x \in]0, 1[$, $\Gamma(x).\Gamma(1-x).\sin(\pi x) = \pi$

(On pourra calculer pour cela $\int_{\frac{1}{2}}^{x} \operatorname{cotan}(\pi t)\,dt$ de deux façons différentes et utiliser le résultat du **I.5.c.**).

II.4.a. Soit $x \in \mathbf{R}^{+*}$ trouver une relation entre $\alpha\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{2}\right)$ et $\alpha\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}^{+*}$, $\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x).\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

c. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$

Troisième partie : Applications

III.1. Calculer : $\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{7}{4}}dt$

III.2a. Soit m, p, r, s des réels positifs ou nuls et $I = \iiint_D x^m y^p z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz$

où $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / \; x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x+y+z \leq 1\}$.

Exprimer I à l'aide de la fonction Γ et des réels m, p, r, s.

b. Que devient I lorsque m, p, r, s sont des entiers naturels ?

FIN